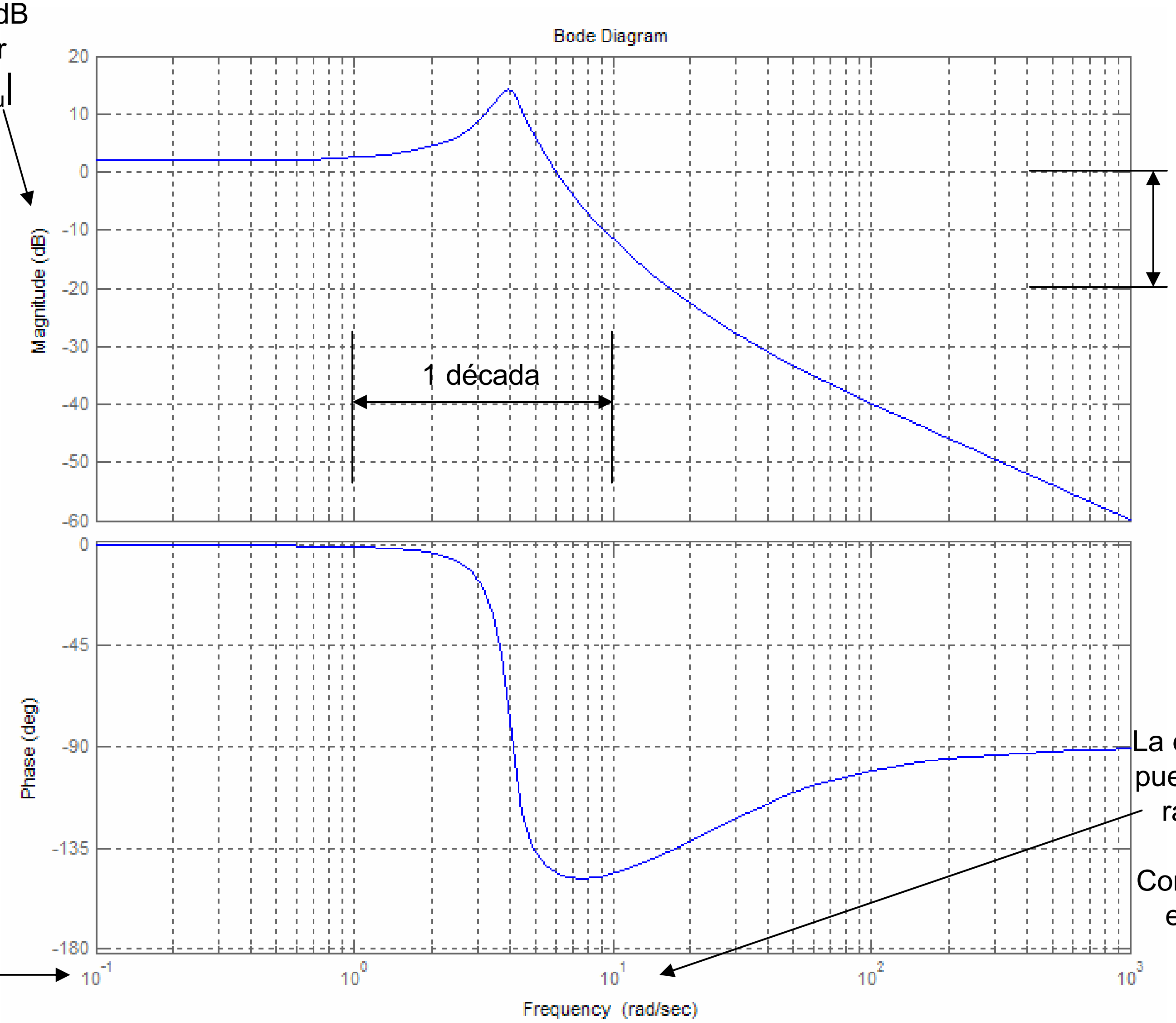
Trazado Asintótico de Diagramas de Bode

Análisis Dinámico de Sistemas

2º curso Ingeniería de Telecomunicación

Anatomía de un Diagrama de Bode

La ganancia en dB
Viene dada por
$20 \cdot \log_{10}|A_y/A_u|$



Bajar/subir 20 dB equivale a dividir/multiplicar por 10

La escala de frecuencias pueden venir en Hz o en rads/seg (pulsación).

Como trabajamos con w emplearemos rads/s

Eje logarítmico de frecuencias

Factorización de una función de transferencia

- La idea esencial es factorizar la G(s) en fdt sencillas cuyos diagramas de Bode asintóticos conocemos.

$$G(s) = K \cdot s^{\pm N} \cdot \left[\prod \frac{p_i}{s + p_i} \right] \cdot \left[\prod \frac{s + c_i}{c_i} \right] \cdot \left[\prod \frac{w_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \right]$$

Término constante

Polos/ceros En el origen

polos reales

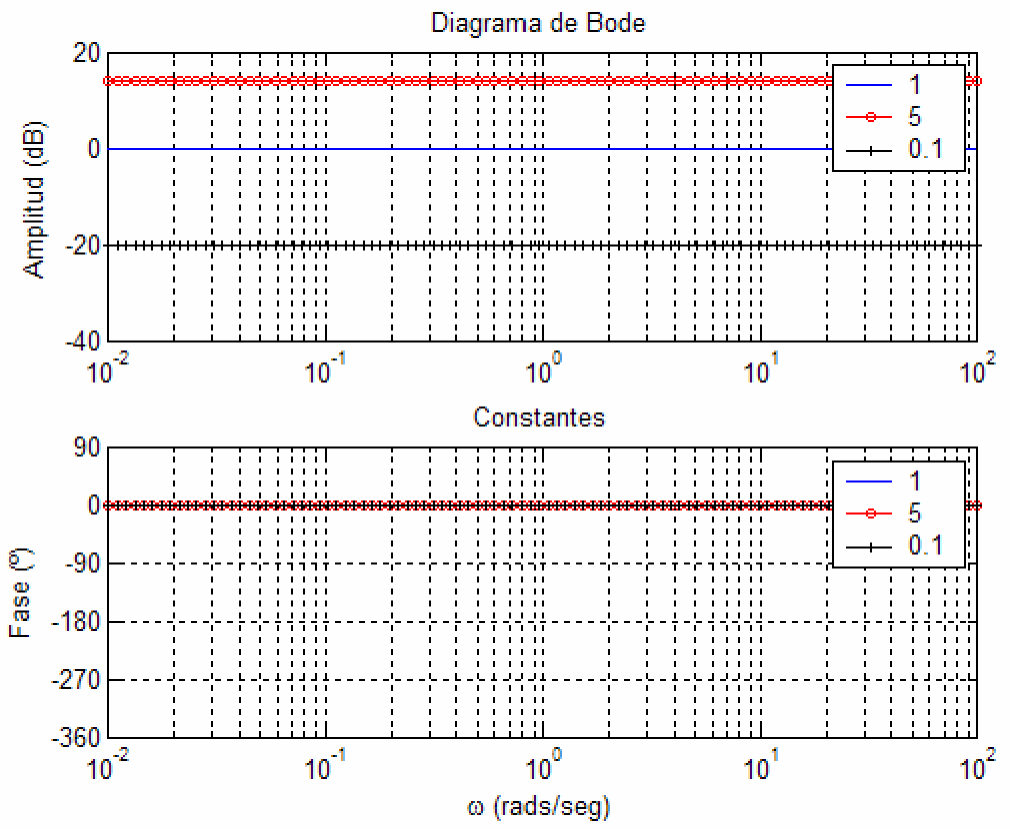
ceros reales

Pares de polos complejos conjugados

- Al ser logarítmico, el Bode del producto de fdt's es la suma de los Bodes de cada fdt por separado
- Una vez factorizada, el diagrama de Bode total es la suma de los diagramas de Bode sencillos

Términos constantes: G(s) = K

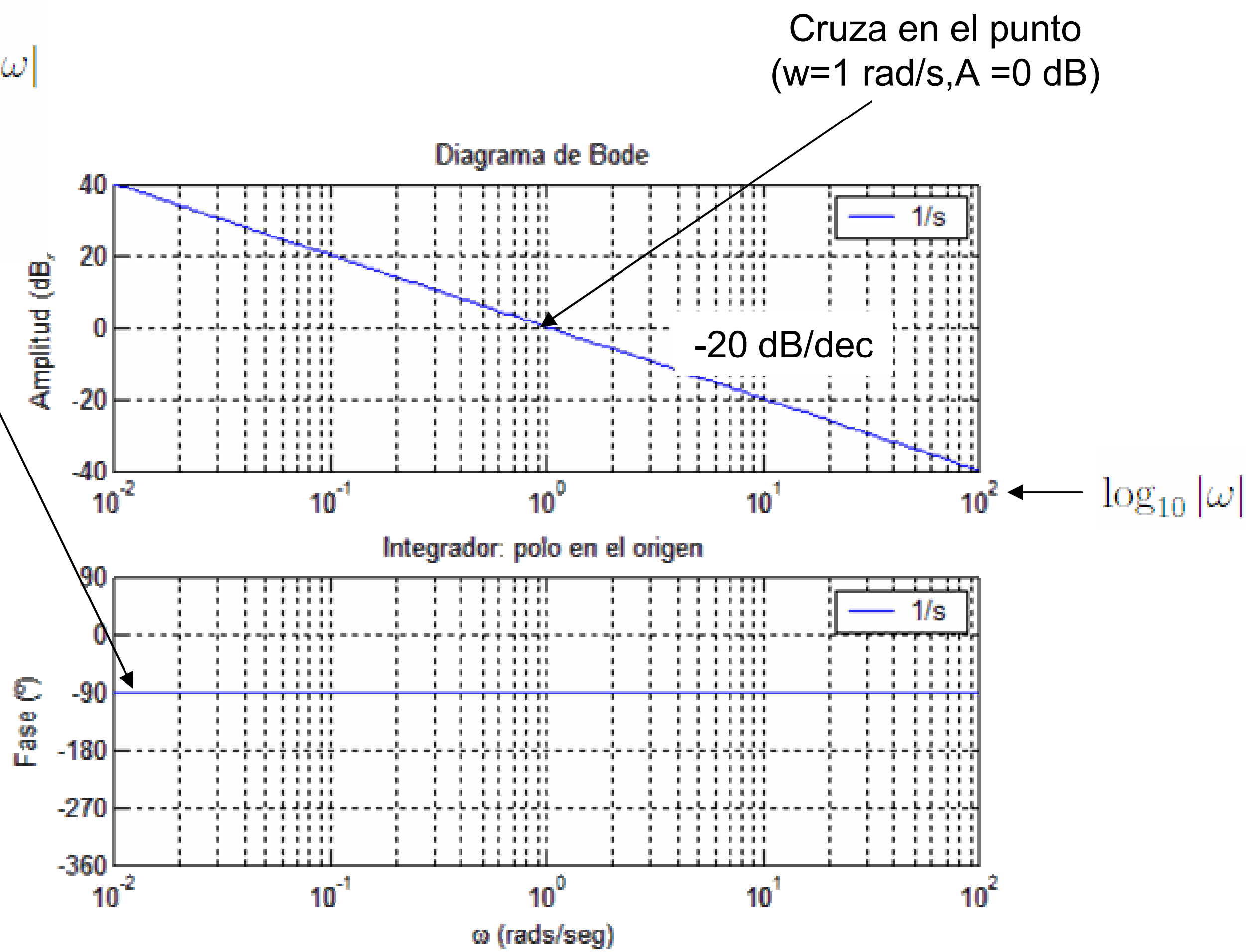
- Las curvas de magnitud son constantes
- La fase es siempre 0º (o bien -180º si la constante es negativa)



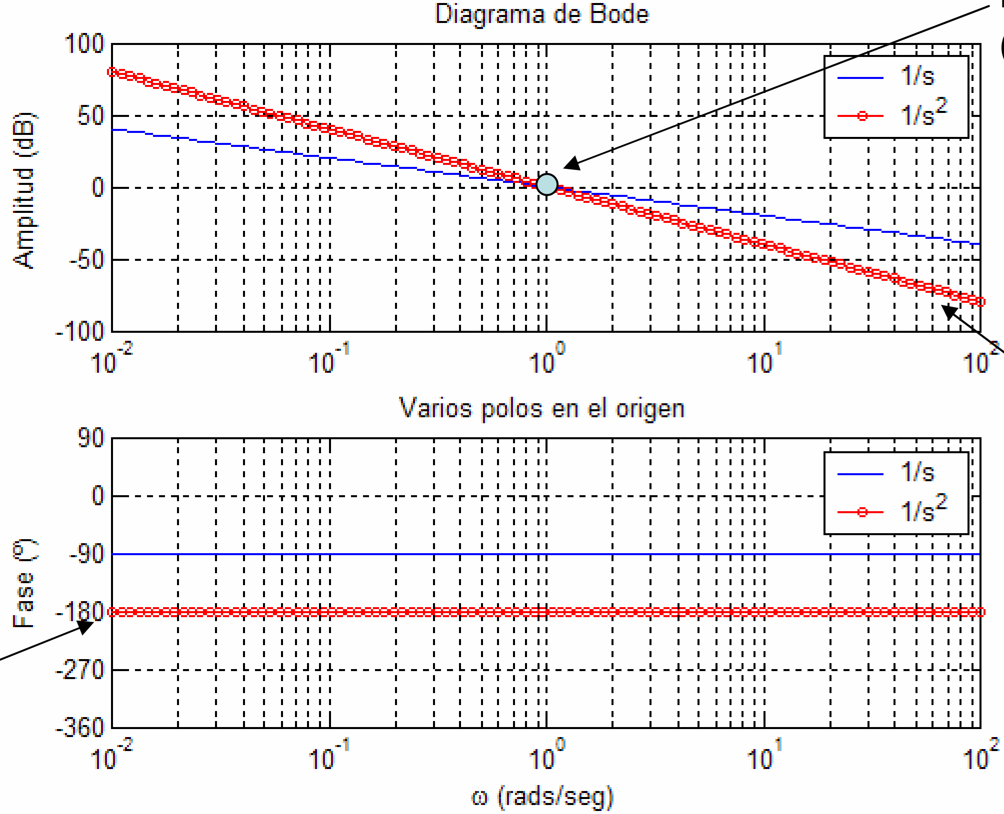
Un polo en el origen: G(s) = 1/s

$$20\log_{10}\left|\frac{1}{j\omega}\right| = -20\log_{10}|\omega|$$

$$\arg\left\{\frac{1}{j\omega}\right\} = -90^\circ$$



Varios polos en el origen: G(s) = $1/s^N$



Pasan todas por el punto (w=1 rad/s, A = 0 dB)

-40 dB/dec

-180º

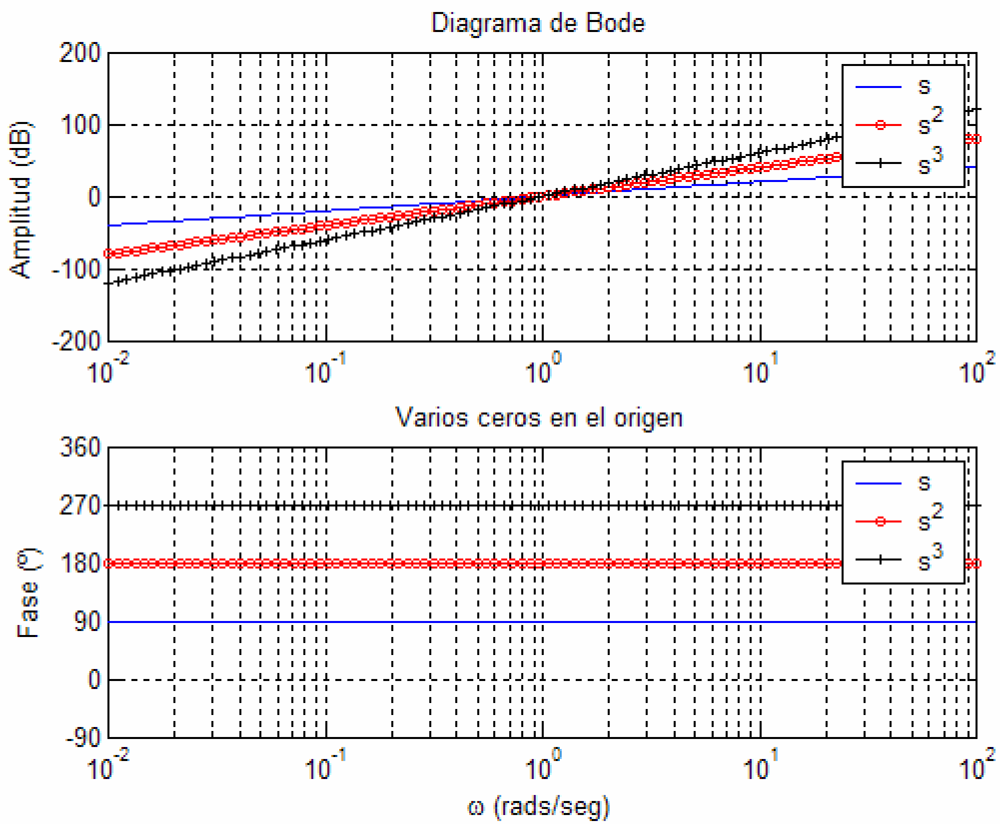
$$20\log_{10}\left|\frac{1}{(j\omega)^2}\right| = -20\log_{10}\left|\omega^2\right| = -20\times 2\log_{10}|\omega| = -40\log_{10}|\omega|$$

$$\arg\left\{\frac{1}{(j\omega)^2}\right\} = -180^{\circ}$$

Varios ceros en el origen

$$20\log_{10}\left|(j\omega)^N\right| = 20N\log_{10}|\omega|$$

$$\arg\left\{(j\omega)^N\right\} = +90N^{\circ}$$



Polo real

$$\frac{p_i}{s+p_i}$$

Frecuencias bajas ($\omega \approx 0$):

$$20\log_{10}\left|\frac{p_i}{j\omega+p_i}\right| \approx 20\log_{10}\left|\frac{p_i}{p_i}\right| = 0$$

$$\arg\left\{\frac{p_i}{j\omega+p_i}\right\} \approx \arg\left\{\frac{p_i}{p_i}\right\} = 0$$

Frecuencias medias ($\omega \approx p_i$):

$$20\log_{10}\left|\frac{p_i}{jp_i+p_i}\right| \approx 20\log_{10}\left|\frac{1}{j+1}\right| = -3\text{dB}$$

$$\arg\left\{\frac{p_i}{j\omega+p_i}\right\} \approx \arg\left\{\frac{1}{j+1}\right\} = -45^{\text{o}}$$

Pendiente
-20 dB/dec

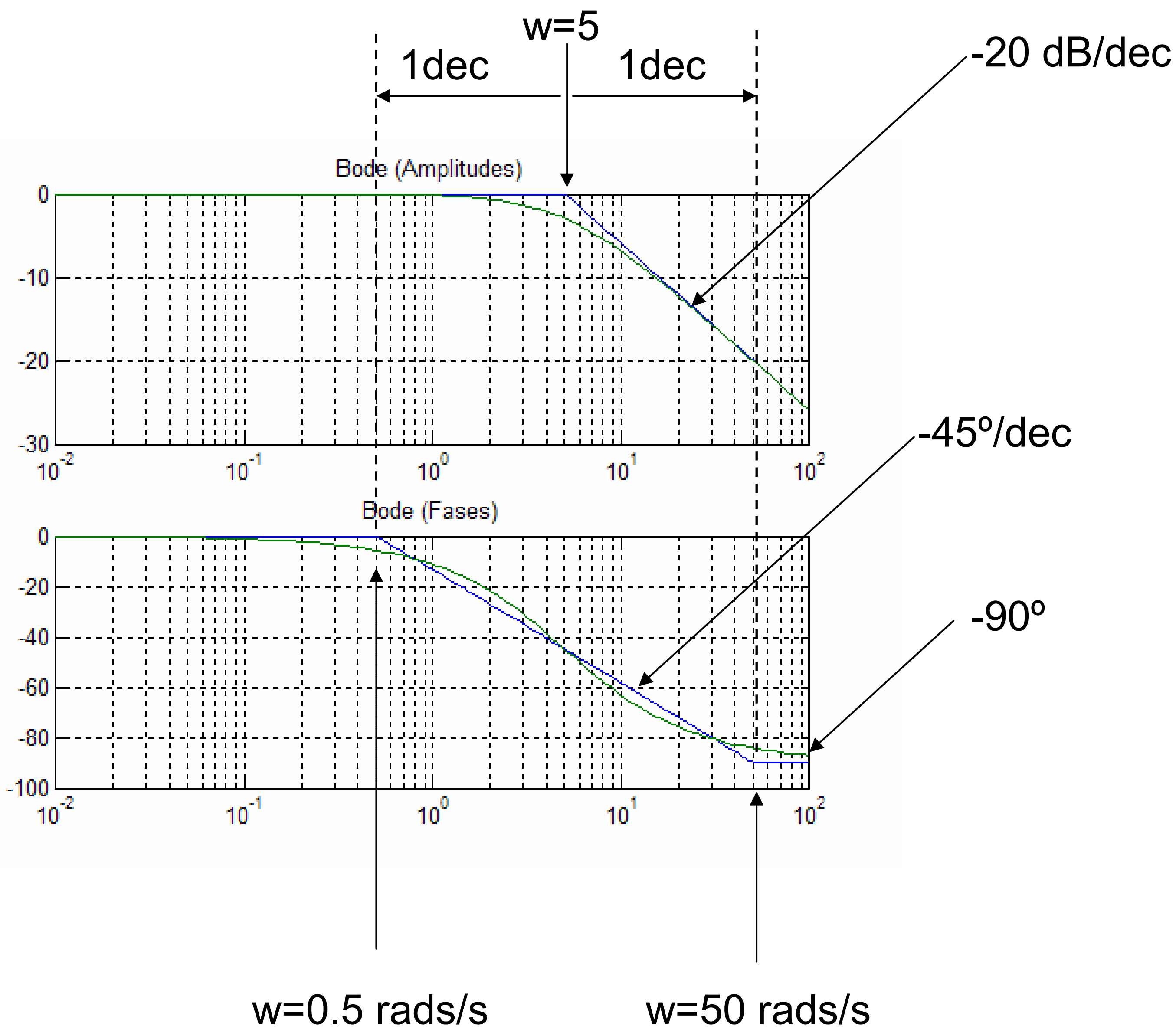
Frecuencias altas ($\omega \approx \infty$):

$$20\log_{10}\left|\frac{p_i}{j\omega+p_i}\right| \approx 20\log_{10}\left|\frac{p_i}{j\omega}\right| = 20\log_{10}|p_i| - 20\log_{10}|j\omega|$$

$$\arg\left\{\frac{p_i}{j\omega+p_i}\right\} \approx \arg\left\{\frac{1}{j\omega}\right\} = -90^{\text{o}}$$

Polo real

$$G(s) = \frac{5}{s+5}$$



Cero real

$$\frac{s + c_i}{c_i}$$

Frecuencias bajas ($\omega \approx 0$):

$$20\log_{10}\left|\frac{j\omega + c_i}{c_i}\right| \approx 20\log_{10}\left|\frac{c_i}{c_i}\right| = 0$$

$$\arg\left\{\frac{j\omega + c_i}{c_i}\right\} \approx \arg\left\{\frac{c_i}{c_i}\right\} = 0$$

Frecuencias medias ($\omega \approx c_i$):

$$20\log_{10}\left|\frac{jc_i + c_i}{c_i}\right| \approx 20\log_{10}\left|\frac{j+1}{1}\right| = +3\text{dB}$$

$$\arg\left\{\frac{j\omega + c_i}{c_i}\right\} \approx \arg\left\{\frac{j+1}{1}\right\} = +45^{\text{o}}$$

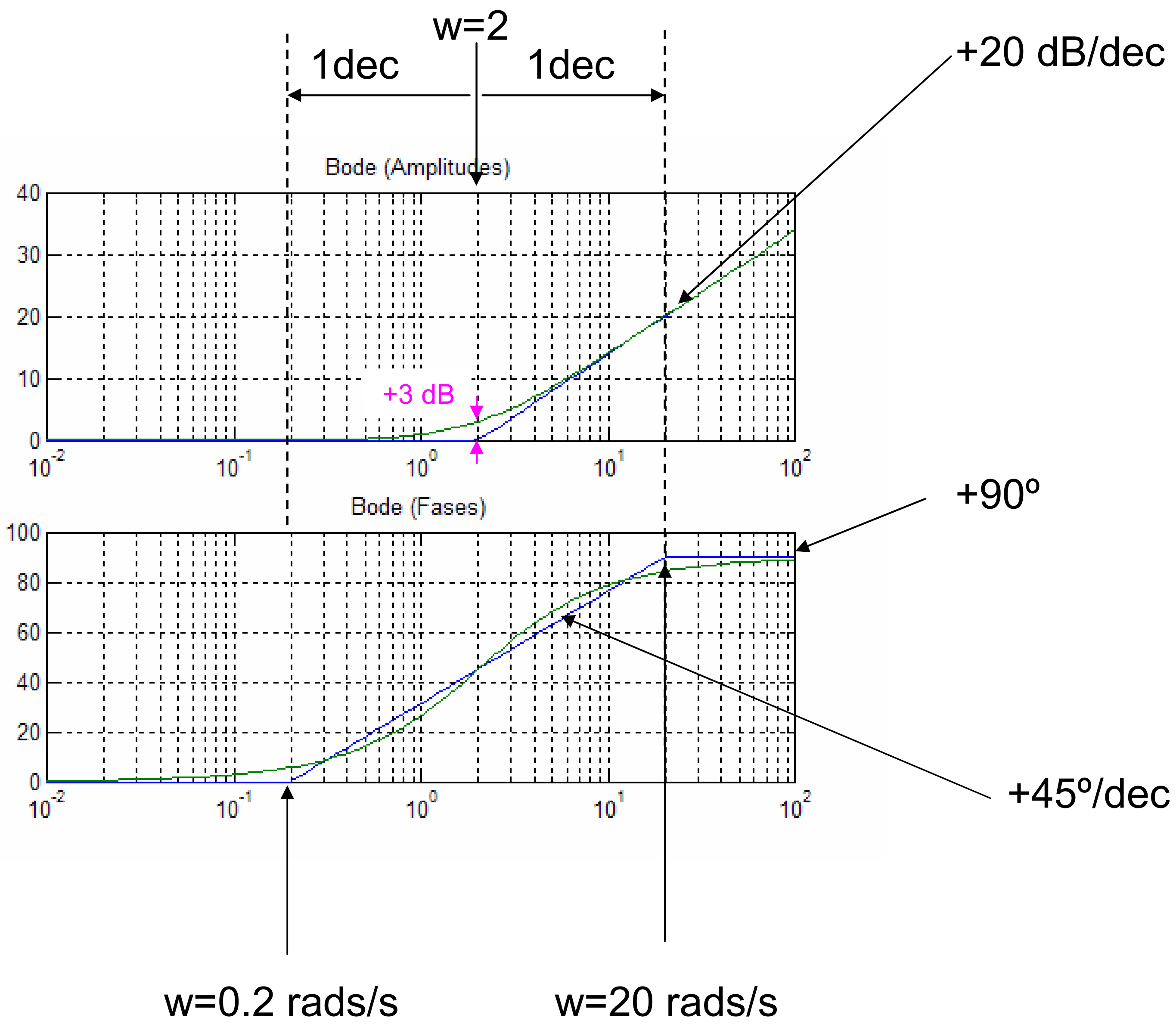
Frecuencias altas ($\omega \approx \infty$):

$$20\log_{10}\left|\frac{j\omega + c_i}{c_i}\right| \approx 20\log_{10}\left|\frac{j\omega}{c_i}\right| = -20\log_{10}|c_i| + 20\log_{10}|j\omega|$$

$$\arg\left\{\frac{j\omega + c_i}{c_i}\right\} \approx \arg\{j\omega\} = +90^{\text{o}}$$

Cero real

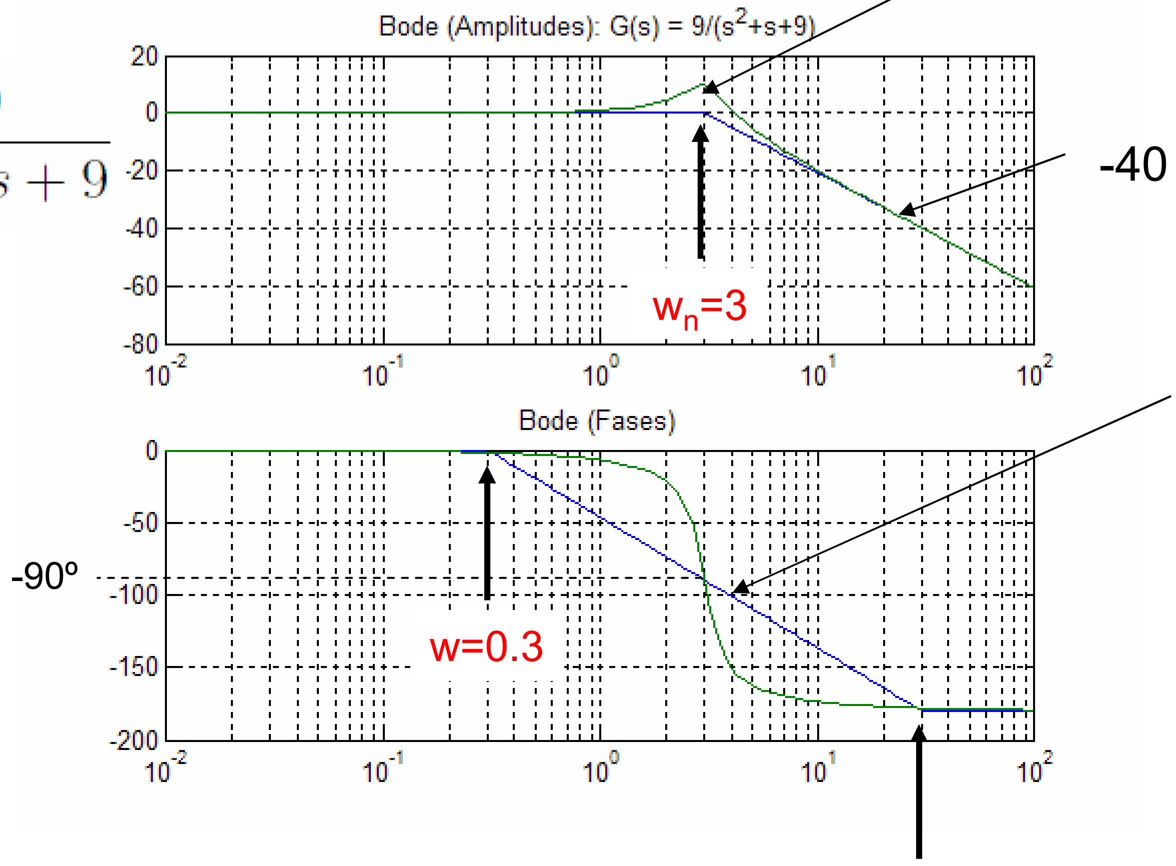
$$G(s) = \frac{s+2}{2}$$



Polos complejos conjugados

La resonancia depende
del factor de amortiguamiento
ξ pequeño → resonancia grande
(ver tablas graficas Puente)

$$G(s) = \frac{9}{s^2 + s + 9}$$



-40 dB/dec

-90º/dec

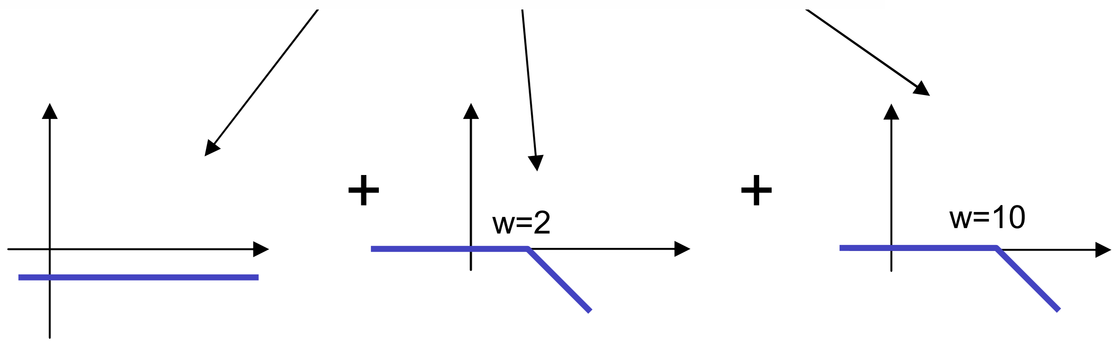
w=30

Ejemplo

$$G(s) = \frac{10}{(s+2)(s+10)}$$

- Lo primero: factorizamos en bloques básicos (de Bodes conocidos)

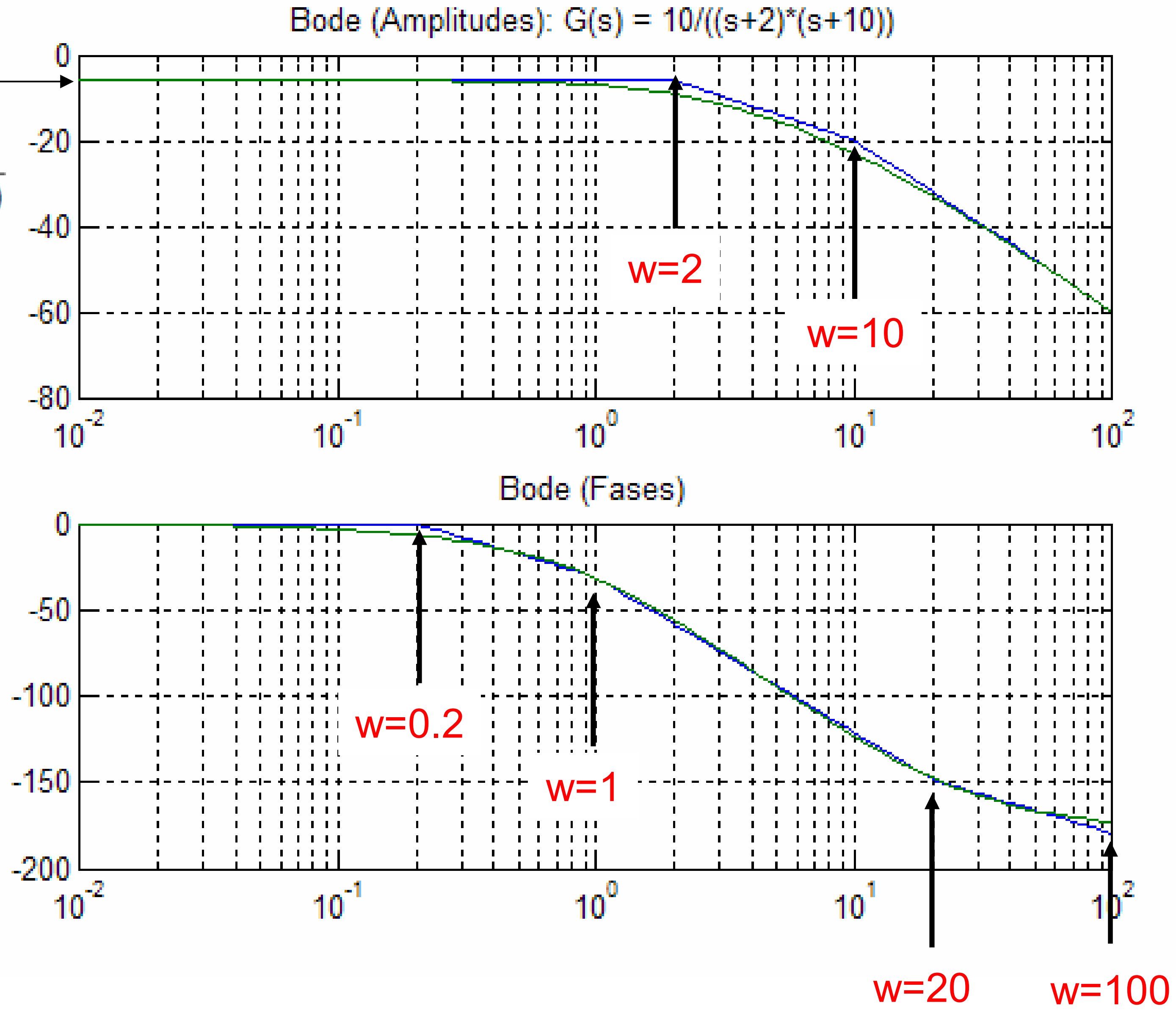
$$G(s) = \frac{10}{(s+2)(s+10)} = 0{,}5 \cdot \frac{2}{s+2} \cdot \frac{10}{s+10}$$



Ejemplo (dos polos reales y term. constante)

20.log10|0.5| = -6 dB

$$G(s) = \frac{10}{(s+2)(s+10)}$$



Ejemplo

- Trazar el Bode asintótico de

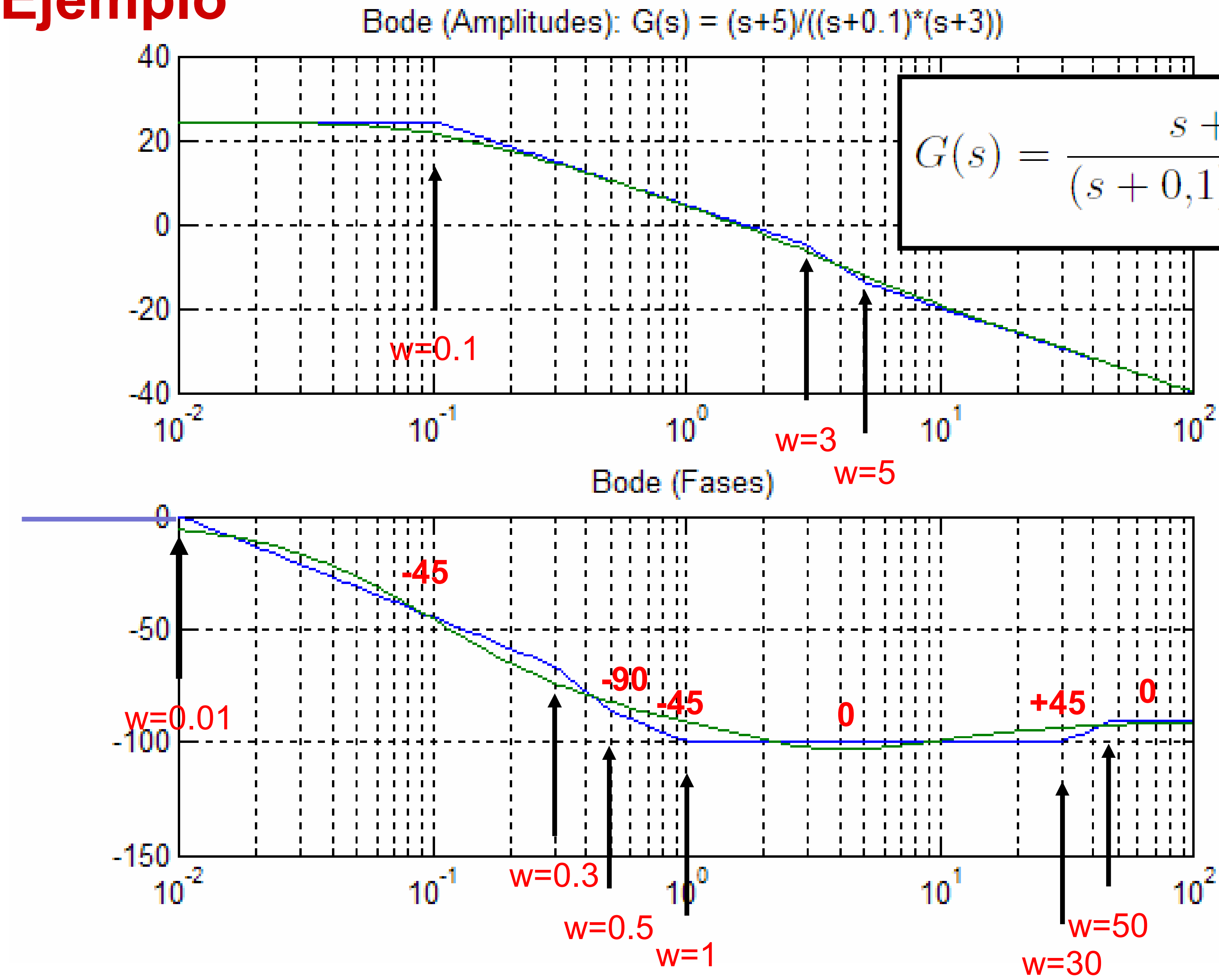
$$G(s) = \frac{s+5}{(s+0{,}1)(s+3)}$$

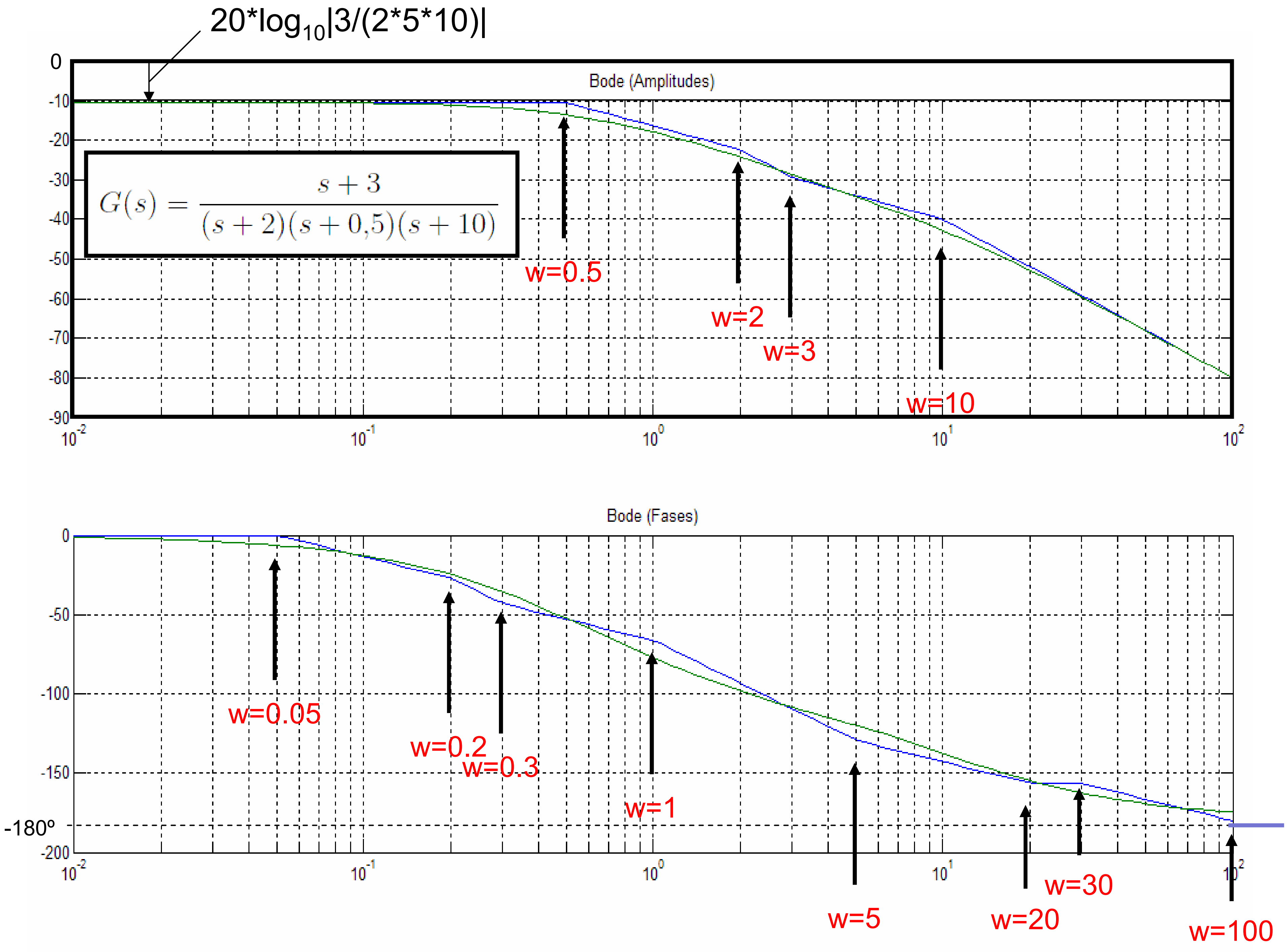
- Factorización en Bodes Básicos

$$G(s) = \frac{s+5}{(s+0{,}1)(s+3)} = \frac{5}{0{,}1\cdot 3}\cdot\frac{0{,}1}{s+0{,}1}\frac{s+5}{5}\frac{3}{s+3}$$

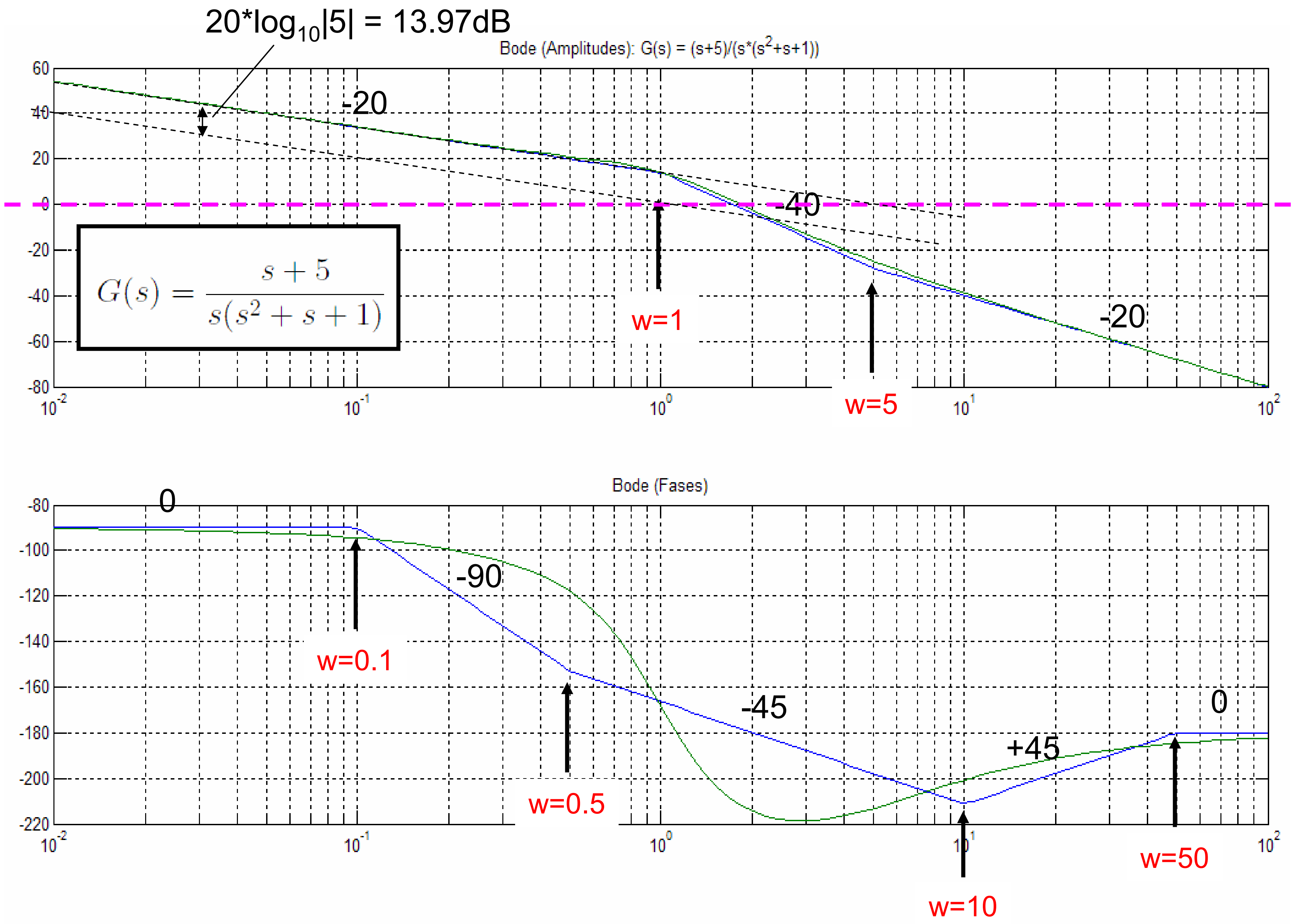
Ejemplo

$$G(s) = \frac{s+5}{(s+0{,}1)(s+3)}$$



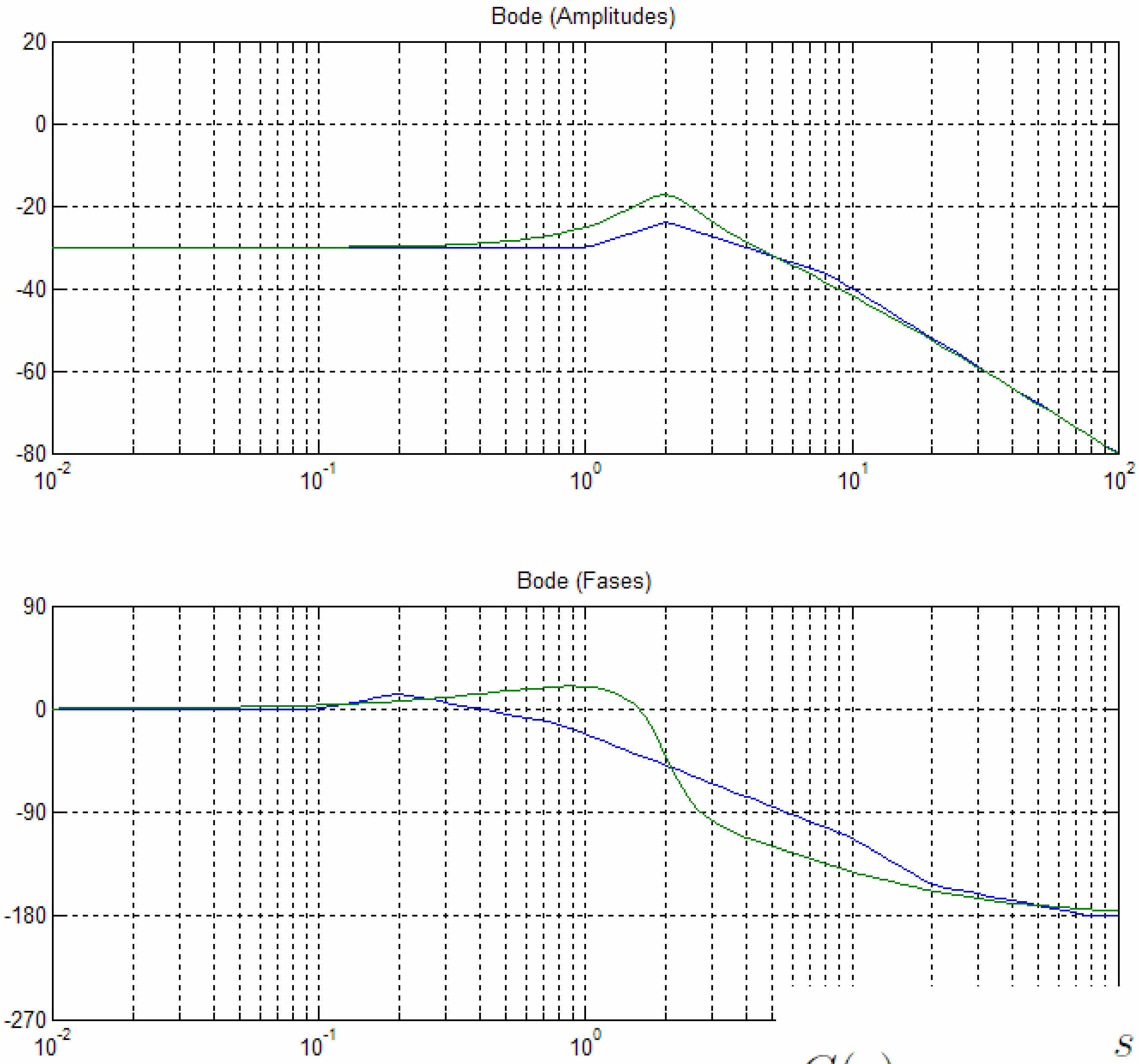


20*log10|3/(2*5*10)|
Bode (Amplitudes)
$G(s) = \frac{s+3}{(s+2)(s+0{,}5)(s+10)}$
w=0.5
w=2
w=3
w=10
Bode (Fases)
w=0.05
w=0.2
w=0.3
w=1
w=5
w=20
w=30
w=100
-180º

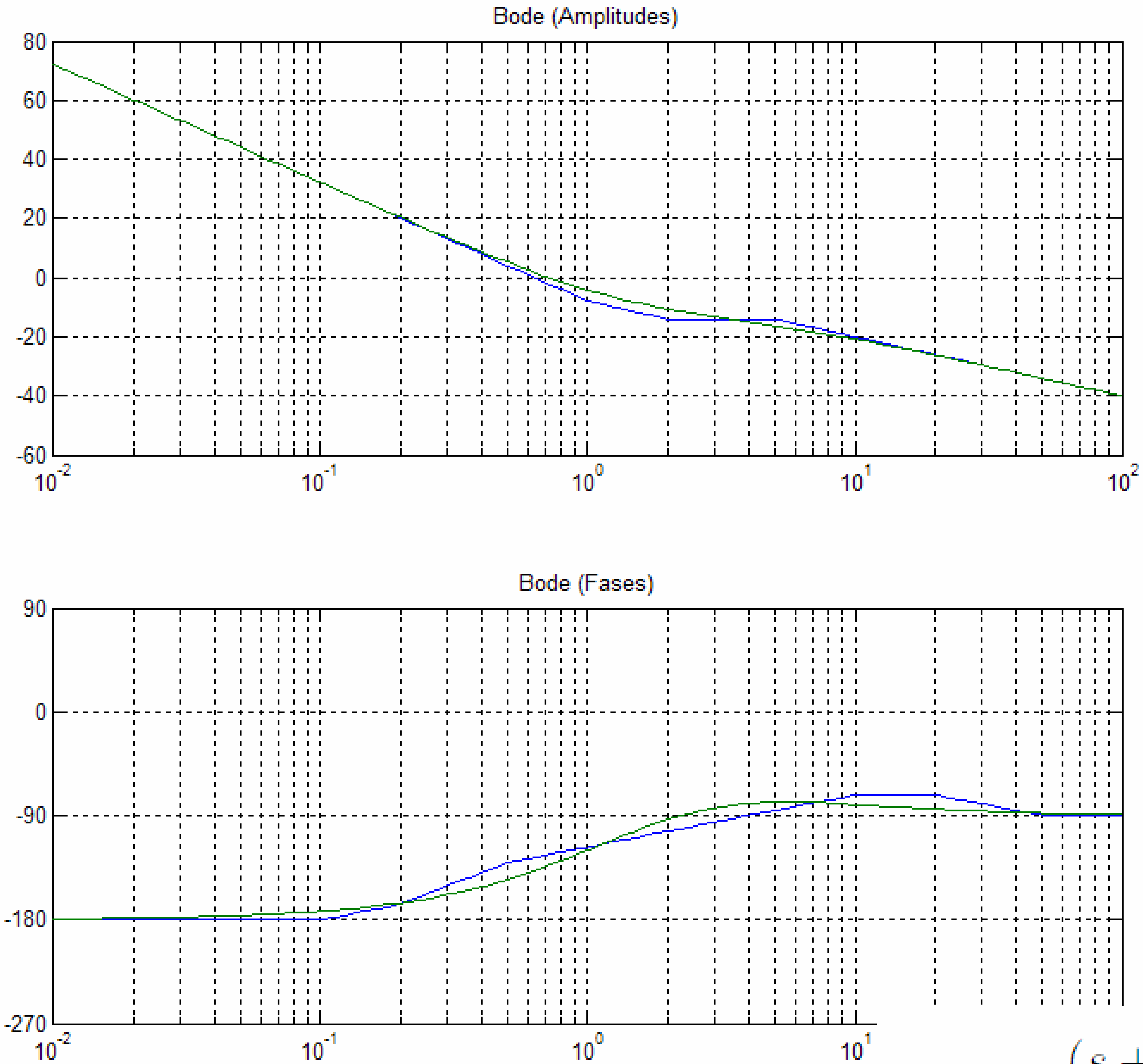


20*log10|5| = 13.97dB
Bode (Amplitudes): G(s) = (s+5)/(s*(s2+s+1))
$G(s) = \frac{s+5}{s(s^2+s+1)}$
-20
-40
-20
w=1
w=5
Bode (Fases)
0
-90
-45
+45
0
w=0.1
w=0.5
w=10
w=50

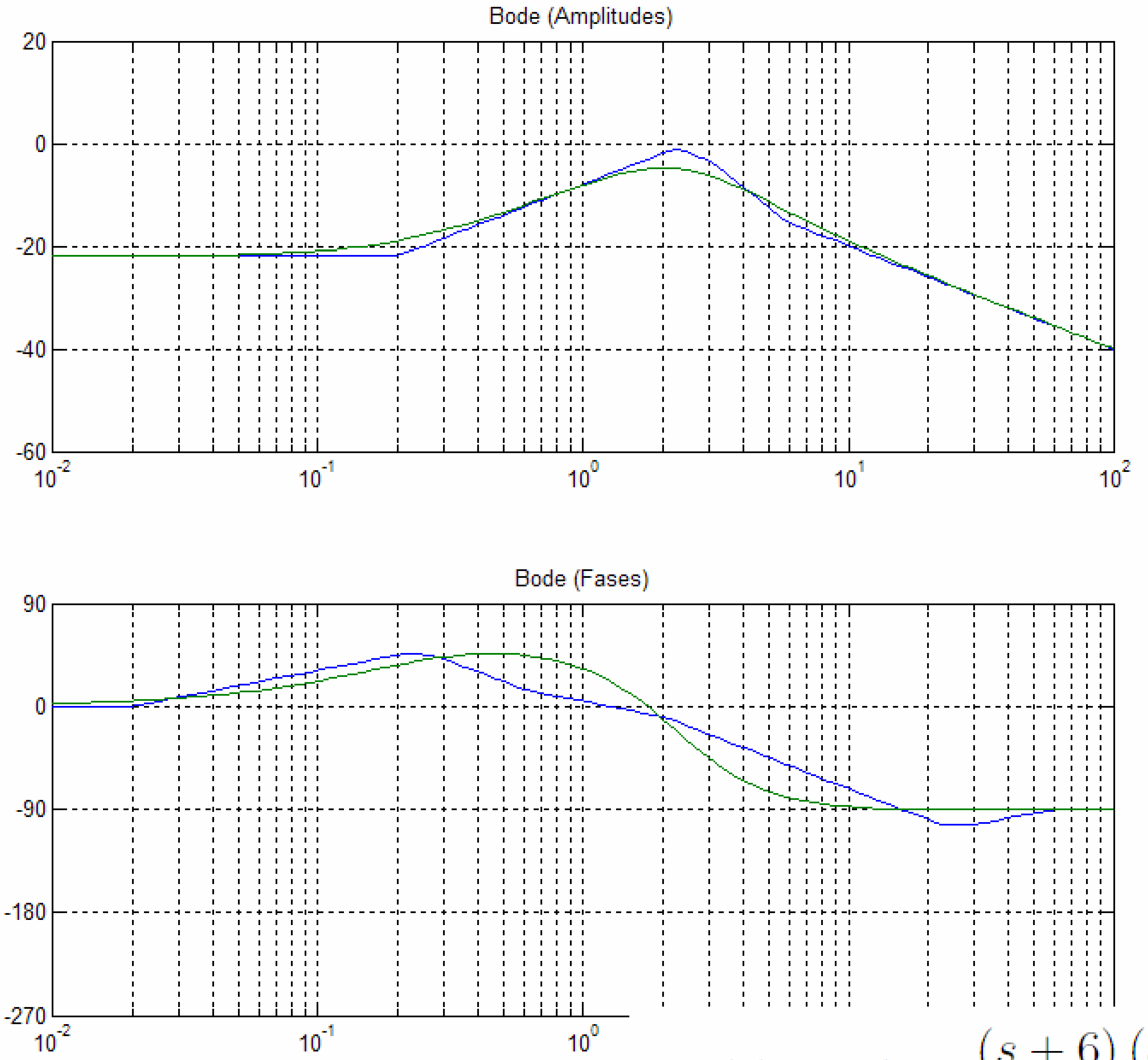
Ejemplos: sistemas de fase mínima



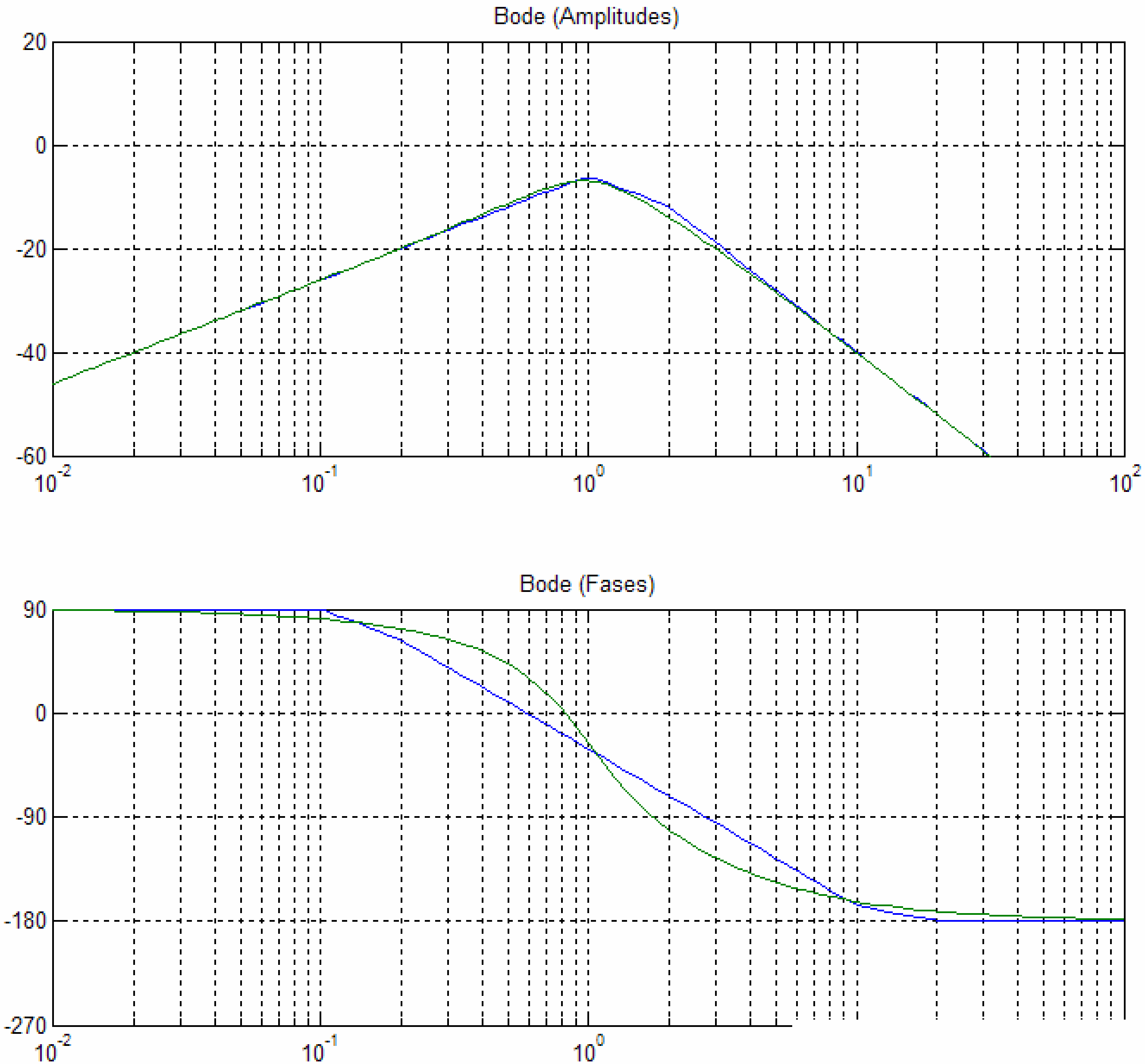
$$G(s) = \frac{s+1}{(s+8)\left(s^2+s+4\right)}$$



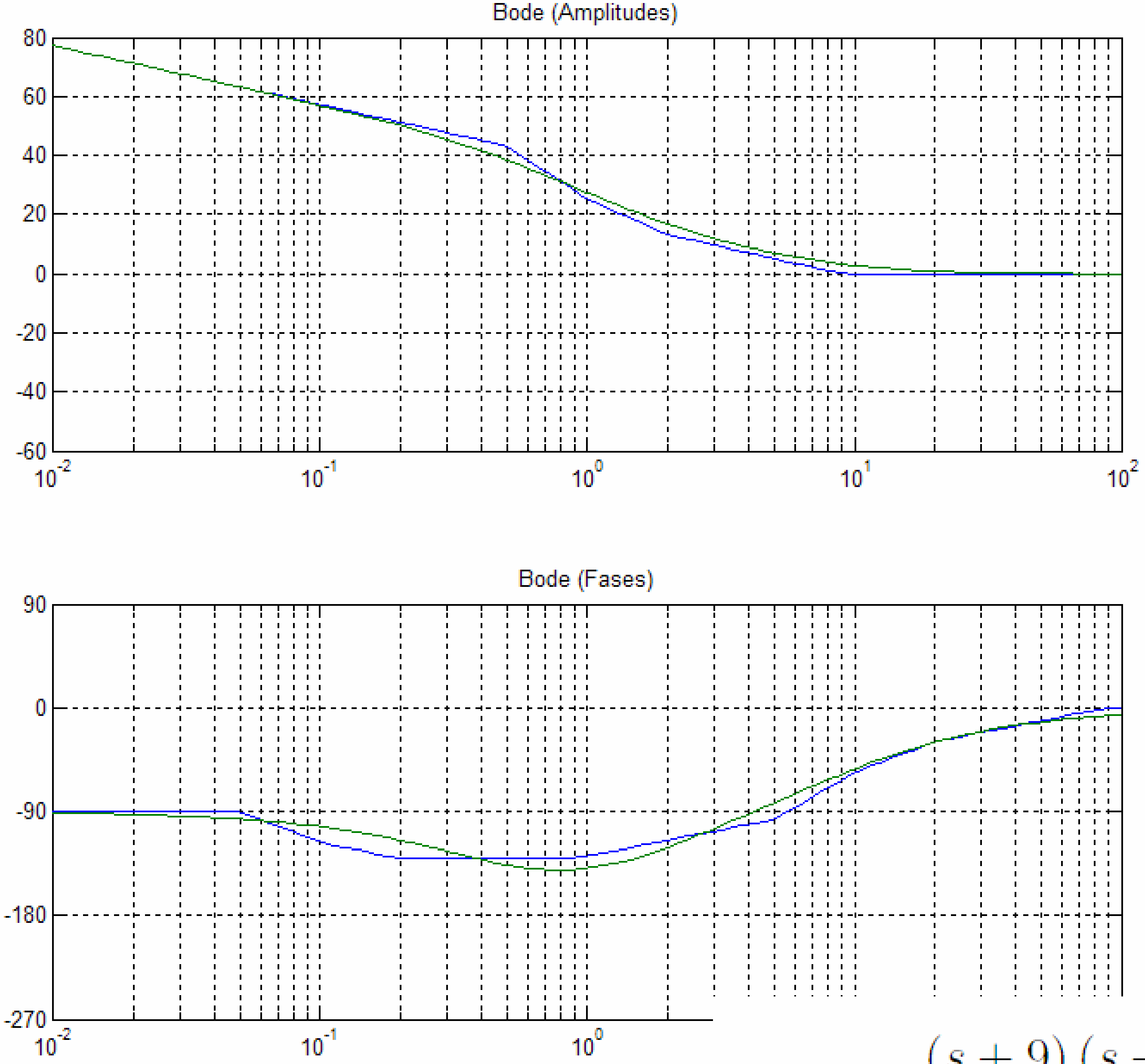
$$G(s) = \frac{(s+2)(s+1)}{(s+5)\,s^2}$$



$$G(s) = 1/5\,\frac{(s+6)\,(5\,s+1)}{(s+3)\,(s^2+3\,s+5)}$$



$$G(s) = \frac{s}{(s+2)\,(s^2+s+1)}$$



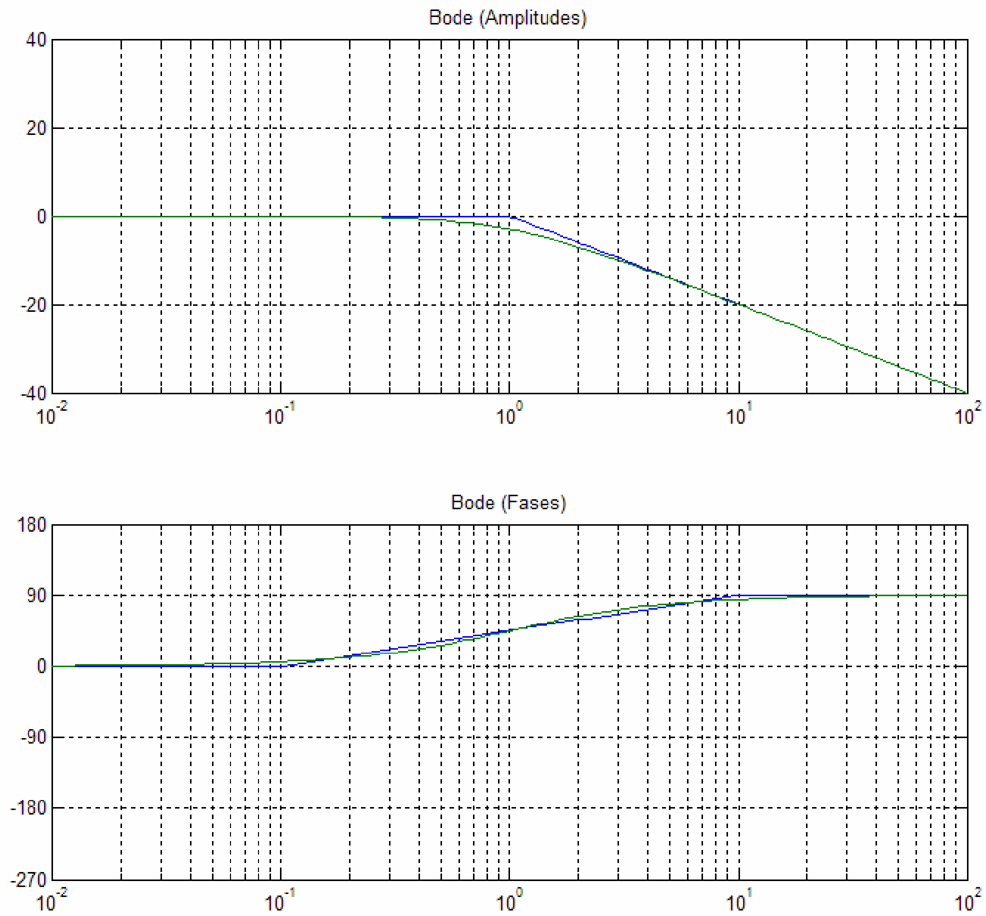
$$G(s) = 4\,\frac{(s+9)\,(s+2)\,(s+1)}{s\,(2\,s+1)^2}$$

Sistemas de fase no mínima

- Son sistemas que tienen polos o ceros en el semiplano positivo
- Su diagrama de módulos es idéntico al de sus homólogos de fase mínima
- Sus fases, sin embargo son distintas

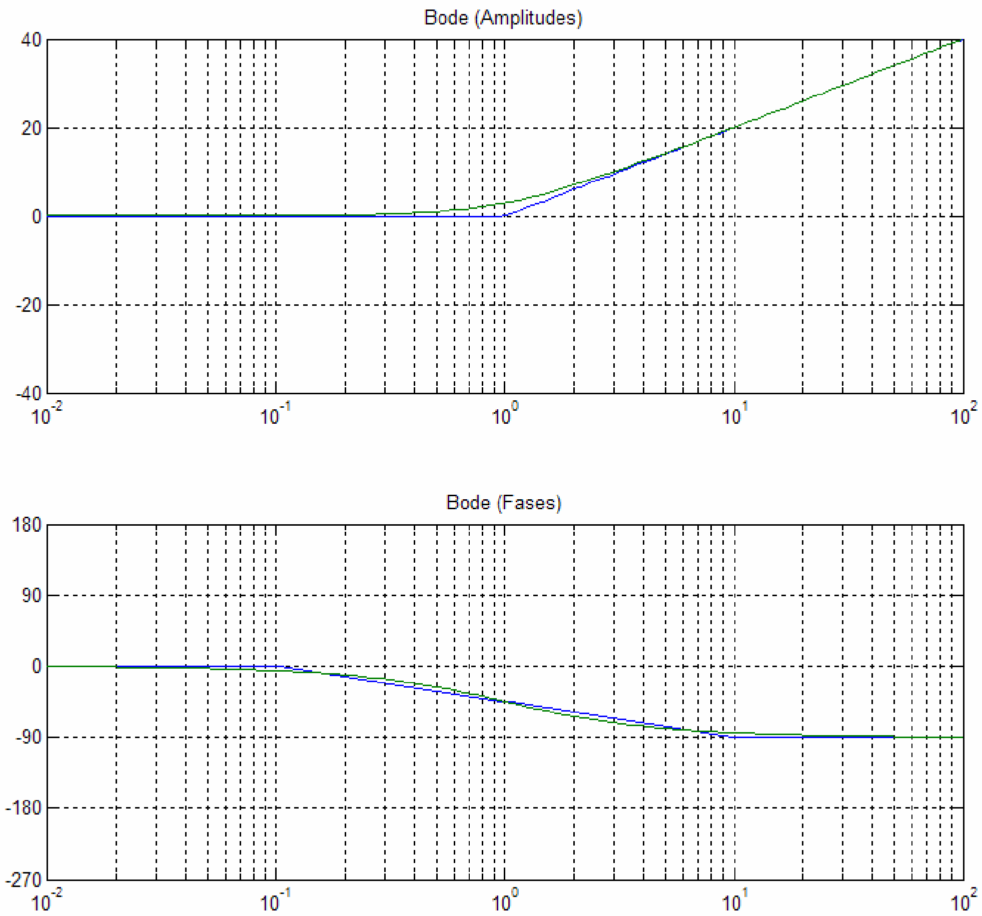
Polo de fase no mínima

$$G(s) = \frac{-1}{s-1}$$

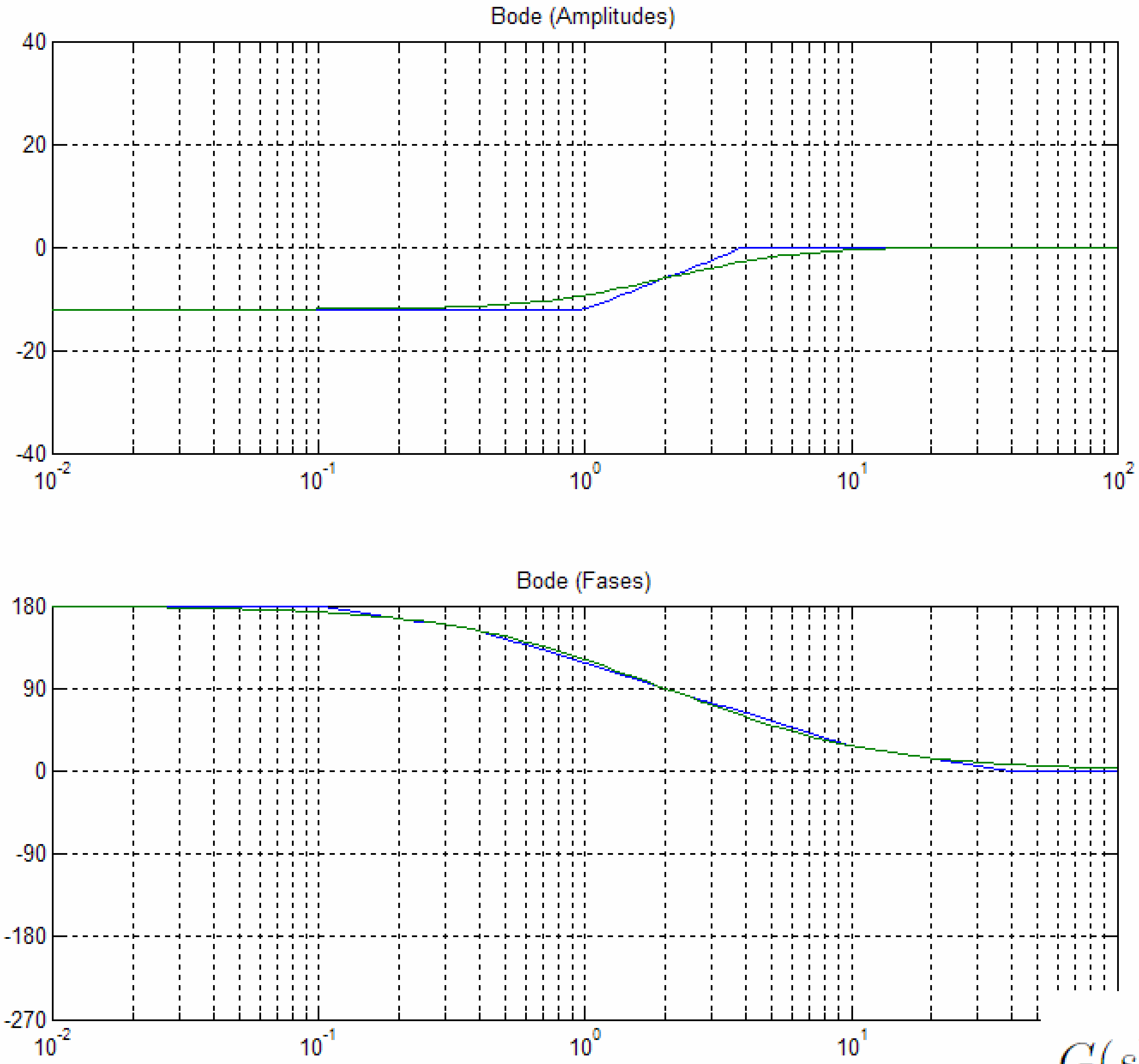


Cero de fase no mínima

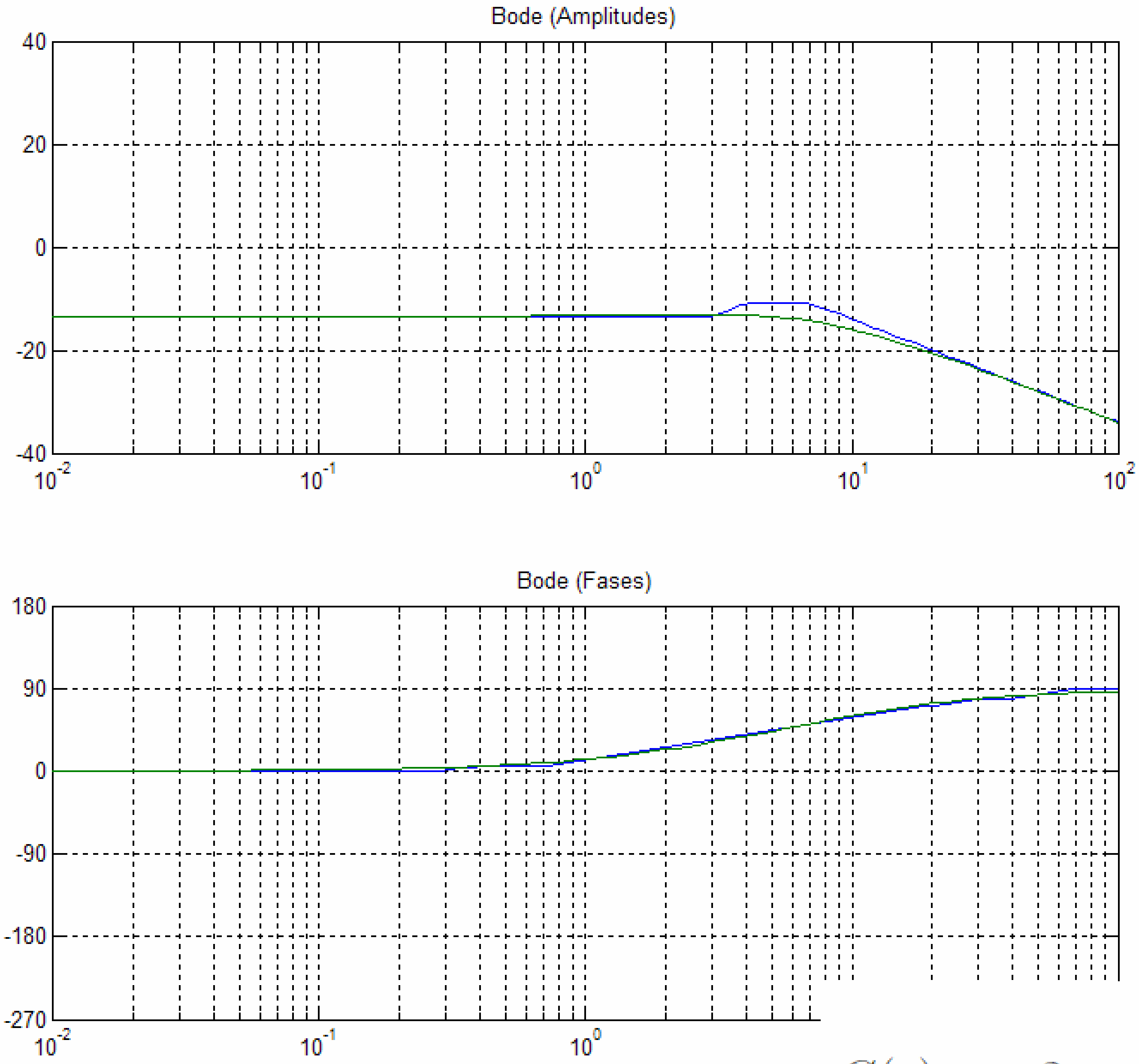
$$G(s) = \frac{s-1}{-1}$$



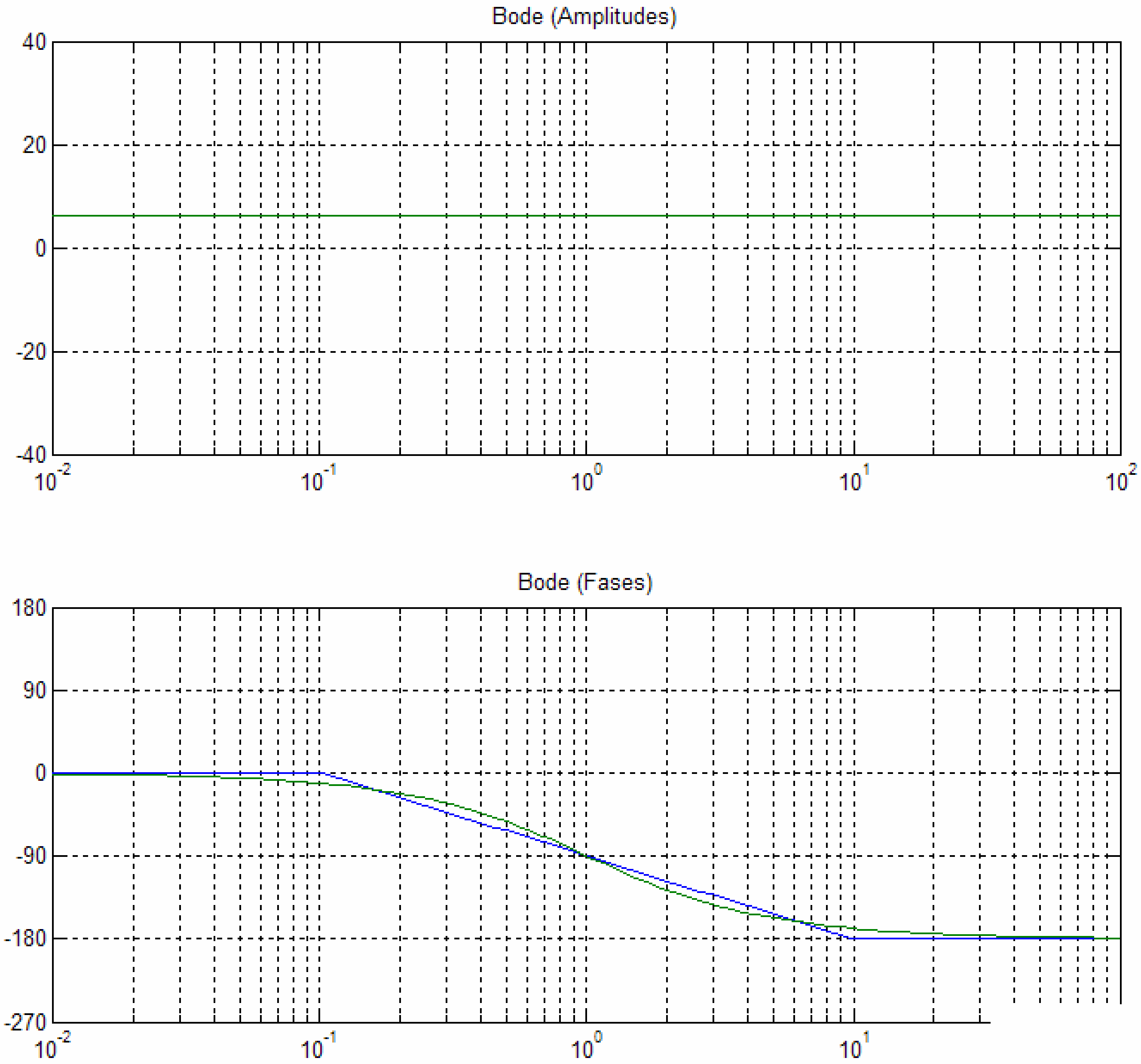
Ejemplos: sistemas de fase no mínima


Bode (Amplitudes)
40
20
0
-20
-40
10^{-2}
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
Bode (Fases)
180
90
0
-90
-180
-270
10^{-2}
10^{-1}
10^{0}
10^{1}

$$G(s) = \frac{s-1}{s+4}$$



$$G(s) = -2\,\frac{s+3}{(s+4)\,(s-7)}$$



$$G(s) = \frac{-2\,s + 2}{s + 1}$$